

排列組合之塗色問題

臺北縣立三民高中 ■ 楊建泰老師

前言

我們可以使用之前所學習過的一些排列技巧，包含樹狀圖、直線排列、環狀排列的觀念，來處理平面圖形與空間圖形之塗色問題。

平面塗色問題

一、基本塗色



圖(一)

如圖(一)所示，相異 2 種顏色塗於此 4 個區域，相鄰不同色之方法為：

- A_1 塗一色，共 2 種塗法；
- A_2 塗一色，不可使用 A_1 的顏色共 1 種塗法；
- A_3 塗一色，不可使用 A_2 的顏色共 1 種塗法；
- A_4 塗一色，不可使用 A_3 的顏色共 1 種塗法。

全部方法數就必須要使用乘法原理相乘起來 $= 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2 \times 1^3$

如圖(一)所示，相異 4 種顏色塗於此 4 個區域，相鄰不同色之方法為：

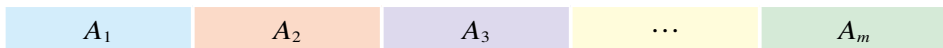
- A_1 塗一色，共 4 種塗法；
- A_2 塗一色，不可使用 A_1 的顏色共 3 種塗法；
- A_3 塗一色，不可使用 A_2 的顏色共 3 種塗法；
- A_4 塗一色，不可使用 A_3 的顏色共 3 種塗法。

全部方法數就必須要使用乘法原理相乘起來 $= 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 4 \times 3^3$

如圖(一)所示，相異 5 種顏色塗於此 4 個區域，相鄰不同色之方法為：

- A_1 塗一色，共 5 種塗法；
- A_2 塗一色，不可使用 A_1 的顏色共 4 種塗法；
- A_3 塗一色，不可使用 A_2 的顏色共 4 種塗法；
- A_4 塗一色，不可使用 A_3 的顏色共 4 種塗法。

全部方法數就必須要使用乘法原理相乘起來 $= 5 \times 4 \times 4 \times 4 = 5 \times 4^3$



圖(二)

如圖(二)所示，相異 n 種顏色塗於此 m 個區域，相鄰不同色之方法為： $n \times (n-1)^{m-1}$

- A_1 塗一色共 n 種塗法；

A_2 塗一色，不可使用 A_1 的顏色共 $n-1$ 種塗法；

A_3 塗一色，不可使用 A_2 的顏色共 $n-1$ 種塗法；

A_4 塗一色，不可使用 A_3 的顏色共 $n-1$ 種塗法；

⋮

A_n 塗一色，不可使用 A_{n-1} 的顏色共 $n-1$ 種塗法。

全部方法數就必須要使用乘法原理相乘起來 $=n \times (n-1) \times (n-1) \times (n-1) = n \times (n-1)^{m-1}$

由此可知我們在這部分所要知道的，就是如何判別相鄰格子如何塗色，並且利用乘法原理將塗色方法計算出來。

二、相鄰不同色（顏色可重複）：非環狀時，使用乘法原理，由接觸面最多的區域先塗



圖(三)

如圖(三)所示，若有相異 6 種顏色塗在此區域中，且相鄰不同色，如何計算其塗法？

方法 先在 A_5 塗一色，因為它與其他區域接觸面最多，共有 6 種塗法。

然後依序

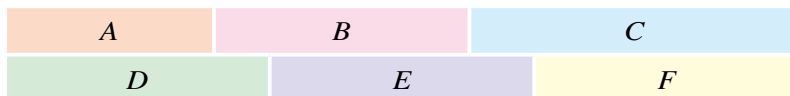
A_1 塗一色，共有 5 種塗法；

A_2 塗一色，共有 4 種塗法（ A_1 ， A_5 顏色不可塗）；

A_3 塗一色，共有 4 種塗法（ A_2 ， A_5 顏色不可塗）；

A_4 塗一色，共有 4 種塗法（ A_3 ， A_5 顏色不可塗）。

最後將他們全部乘起來，其塗法 $= 5 \times 4 \times 4 \times 4 = 320$



圖(四)

如圖(四)所示， B 的接觸面有 4 個，由 B 區先塗，（當然也可以由 E 先塗），依下列順序：

$B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow A$

相異 n 種顏色塗於此區域，相鄰不同色之方法：

有 4 個接觸面的 B 塗一色，共有 n 種塗法；

有 4 個接觸面的 E 塗一色，共有 $n-1$ 種塗法（ B 顏色不可塗）；

有 3 個接觸面的 D 塗一色，共有 $n-2$ 種塗法（ B ， E 顏色不可塗）；

有 3 個接觸面的 C 塗一色，共有 $n-2$ 種塗法（ B ， E 顏色不可塗）；

有 2 個接觸面的 F 塗一色，共有 $n-2$ 種塗法（ C ， E 顏色不可塗）；

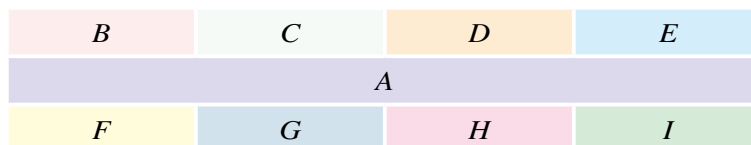
有 2 個接觸面的 A 塗一色，共有 $n-2$ 種塗法（ C ， E 顏色不可塗）。

最後將他們全部乘起來，其塗法： $n \times (n-1) \times (n-2)^4$

Ex：用五種不同顏色塗於上頁圖(四)之六格面板，塗法多少種？

答案： $5 \times 4 \times 3^4$

三、複雜圖形塗色法



圖(五)

原則 從接觸面最多先塗，再從已塗過的共同接觸面順序塗完。如圖(五)依下列順序：

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E, A \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I$

(1) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ 部分：

A 塗一色，共有 n 種塗法

B 塗一色，共有 $n-1$ 種塗法 (A 顏色不可塗)；

C 塗一色，共有 $n-2$ 種塗法 (A, B 顏色不可塗)；

D 塗一色，共有 $n-2$ 種塗法 (A, C 顏色不可塗)；

E 塗一色，共有 $n-2$ 種塗法 (A, D 顏色不可塗)。

(2) $A \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I$ 部分：

F 塗一色，共有 $n-1$ 種塗法 (A 顏色不可塗)；

G 塗一色，共有 $n-2$ 種塗法 (A, F 顏色不可塗)；

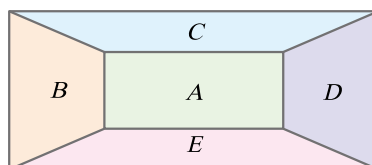
H 塗一色，共有 $n-2$ 種塗法 (A, G 顏色不可塗)；

I 塗一色，共有 $n-2$ 種塗法 (A, H 顏色不可塗)。

結論 相異 n 種顏色塗於此區域，相鄰不同色 (非循環狀) 之方法 =

$$n \times (n-1)^2 \times (n-2)^6$$

四、基本對稱圖形塗法之探討



圖(六)

圖(六)中之圖形，相異 n 種顏色塗於此區域，我們可以依下列順序塗色：

(1) B, D 塗同色時，依順序：

有 5 個接觸面的 A 共有 n 種塗法；因 B, D 塗同色時 B 共有 $n-1$ 種塗法， D 隨 B 來塗共有 1 種方法；

有 3 個接觸面的 C 共有 $n-2$ 種塗法；

有 3 個接觸面的 E 共有 $n-2$ 種塗法。

(2) B, D 塗異色時，依順序：

有 5 個接觸面的 A 共有 n 種塗法；

因 B, D 塗異色時 B 共有 $n-1$ 種塗法， D 不隨 B 來塗共有 $n-2$ 種方法；

有 3 個接觸面的 C 共有 $n-3$ 種塗法；

有 3 個接觸面的 E 共有 $n-3$ 種塗法。

二種方法是二種不連續的情況，這時使用加法原理，因此全部的塗法是：

$$n(n-1)(n-2)^2 + n(n-1)(n-2)(n-3)^2$$

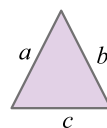
五、環狀圖形塗色方法之專題討論

(一)相鄰不同色（循環狀）：

以 n 種顏色塗下列各邊，相鄰不同色之方法數，如圖(七)之三角形各邊塗法：

塗 a 邊共有 n 種塗法，塗 b 邊共有 $n-1$ 種塗法，塗 c 邊共有 $n-2$ 種塗法，全部塗法：

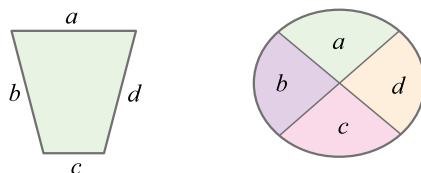
$$\begin{aligned} n(n-1)(n-2) &= n^3 - 3n^2 + 2n = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 - n + 1 \\ &= (n-1)^3 - (n-1) \end{aligned}$$



圖(七)

(二)圖(八)之四邊形各邊塗法：

下圖左之四邊形邊的塗法與下圖右之內部塗法方法相同，我們分下列情形來討論：



圖(八)

(1) 當 a, c 同色時：

a 塗 n 種顏色， c 隨 a 塗同 1 種顏色， b, d 各塗 $n-1$ 種顏色，全部塗法 $= n(n-1)(n-1)$

(2) 當 a, c 異色時：

a 塗 n 種顏色， c 不隨 a 塗，共 $n-1$ 種顏色， b, d 各塗 $n-2$ 種顏色，全部塗法 $= n(n-1)(n-2)(n-2)$

(3) 共計： $n(n-1)(n-1) + n(n-1)(n-2)(n-2)$

$$= n(n-1)[n-1+n^2-4n+4] = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 3n = (n-1)^4 + (n-1)$$

(三)圖(九)之五邊形各邊塗法：由 a, c, e 三邊討論

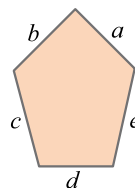
(1) 當 a, c, e 同色時：不可能，因為 a, e 相鄰。

(2) a, e 同色 c 異色：不可能，因為 a, c 相鄰。

(3) a, c 同色 e 異色： a 塗 n 種顏色， c 隨 a 塗同 1 種顏色， b, e 塗色方法有 $n-1$ 種， d 塗色方法有 $n-2$ 種。因此共計塗法 $= n(n-1)(n-1)(n-2)$ 。

(4) c, e 同色 a 異色，塗法與(3)相同，因此共計塗法 $= n(n-1)(n-1)(n-2)$ 。

(5) a, c, e 均異： a 塗 n 種顏色， c 不隨 a 塗同 1 種顏色，共有 $n-1$ 種塗法， b, e 塗 $n-2$ 種顏



圖(九)

色， d 塗 $n-2$ 種顏色，因此共計塗法 $= n(n-1)(n-2)(n-2)$

$$\begin{aligned}
 (6) \text{ 共計: } & 2n(n-1)(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-2)(n-2) \\
 & = n(n-1)(n-2)(2n-2+n^2-4n+4) \\
 & = n(n^2-3n+2)(n^2-2n+2) \\
 & = n(n^4-5n^3+10n^2-10n+4) \\
 & = n^5-5n^4+10n^3-10n^2+4n \\
 & = n^5-5n^4+10n^3-10n^2+5n-1-n+1 \\
 & = (n-1)^5 - (n-1)
 \end{aligned}$$

(7) 結論：以 n 個顏色塗 r 邊形之 r 個邊，相鄰不同色之方法 $= (n-1)^r + (-1)^r(n-1)$

四將問題一般化：

1. 用 k 種顏色來塗正 n 邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \dots A_{n-1} A_n$ 的頂點 ($n \geq 3$)，使得每一頂點著一種顏色，且相鄰的頂點不同色，試問有幾種不同的塗法？

解 用 k 種顏色來塗正 n 邊形的頂點，設有 a_n 種不同的塗法

$$\text{則 } a_3 = k(k-1)(k-2)$$

$$\text{而 } a_4 = k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2)^2$$

$$= k(k-1)(k^2-3k+3)$$

對正 $n+1$ 邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \dots A_n A_{n+1}$ ，我們分成下列幾種情況來討論：

- (1) 當 A_1 與 A_n 不同色，則 A_{n+1} 有 $k-2$ 種不同塗法，而 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \dots A_n$ 有 a_n 種不同的塗法，於是，由乘法原理知道，此情況下有 $(k-2)a_n$ 種不同的塗法。
- (2) 當 A_1 與 A_n 同色，則 A_{n+1} 有 $k-1$ 種不同塗法，而 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \dots A_n$ 有 a_{n-1} 種不同的塗法，於是，由乘法原理知道，此情況下有 $(k-1)a_{n-1}$ 種不同的塗法。
- (3) 因此由加法原理可以得到下列遞迴式： $a_{n+1} = (k-2)a_n + (k-1)a_{n-1}$ ， $\forall n \geq 4$
- (4) 解特徵方程式 $x^2 - (k-2)x - (k-1) = 0$ ，得到 $x = k-1$ 或 $x = -1$ ，故可令

$$a_n = u(k-1)^n + v(-1)^n, \forall n = 3, 4, 5, \dots$$

- (5) 再由初始條件 $a_3 = k(k-1)(k-2)$ ， $a_4 = k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2)^2 = k(k-1)(k^2-3k+3)$ 可解得 $u=1, v=k-1 \Rightarrow a_n = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ ， $\forall n = 3, 4, 5, \dots$

另解 令 $b_n = a_n + a_{n-1}$ ， $\forall n \geq 4$

$$\text{則 } b_{n+1} = a_{n+1} + a_n = (k-2)a_n + (k-1)a_{n-1} + a_n$$

$$= (k-1)a_n + (k-1)a_{n-1}$$

$$= (k-1)(a_n + a_{n-1})$$

$$= (k-1)b_n$$

$$b_4 = a_4 + a_3 = k(k-1)(k-2) + k(k-1)(k^2-3k+3)$$

$$= k(k-1)(k^2-3k+3+k-2)$$

$$= k(k-1)(k^2-2k+1),$$

$$b_5 = (k-1)b_4, b_6 = (k-1)b_5 = (k-1)^2b_4,$$

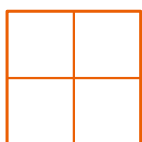
$$b_7 = (k-1)b_6 = (k-1)^3b_4 = (k-1)^{7-4}b_4, \dots$$

$$\begin{aligned}
 \text{因此 } b_n &= (k-1)^{n-4} b_4 \\
 &= (k-1)^{n-4} k (k-1) (k^2 - 2k + 1) \\
 &= k (k-1)^{n-1} \\
 &= [(k-1)^n + (-1)^n (k-1)] + [(k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} (k-1)] \\
 &= a_n + a_{n-1}
 \end{aligned}$$

於是 $a_n = (k-1)^n + (-1)^n (k-1)$, $\forall n=3, 4, 5, \dots$

六、試題練習：利用相異 6 種顏色塗於下列圖形中，求相鄰不同色之方法

1.



$$(6+1)^4 + (6-1) = 630$$

2.



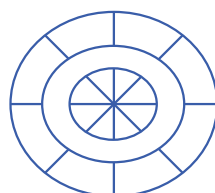
$$(6-1)^5 - (6-1) = 3120$$

3.



$$(6-1)^8 + (6-1) = 390630$$

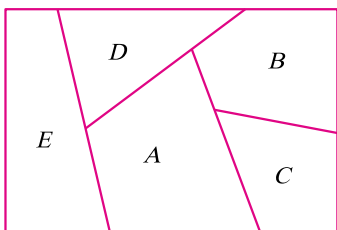
4.



$$6 \cdot [(5-1)^8 + (-1)^8 \cdot (5-1)]^2 = 6(4^8 + 4)^2$$

塗法：中間空白處先塗共 6 種，剩 5 顏色塗環狀部分

5.

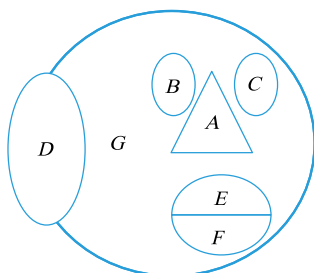


塗法：A(6)D(5)B(4)

C(4)E(4),

$$6 \times 5 \times 4 \times 4 \times 4 = 1920$$

6.

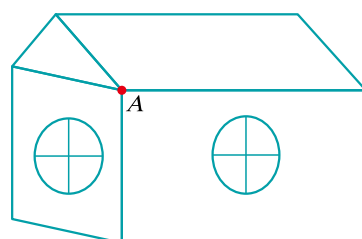


塗法：A(6)G(5)B(5)

C(5)D(5)E(5)F(4),

$$6 \times 5^5 \times 4 = 75000$$

7.



塗法：以 A 為中心之四邊形，

$$(5^4 + 5)(4^4 + 4)^2 = 42588000$$

七、平面板，顏色不能重複

1. 固定板 $\Rightarrow P(\text{色}, \text{區}) = P_n^r$ ，此時顏色數目一定要多於區域數目。

例如：將五種相異的顏色塗在同一板子分割成的三個非旋轉區域中，顏色不可重複，其塗法

$$\text{有多少種？塗法：} P_3^5 = \frac{5!}{2!} = 60$$

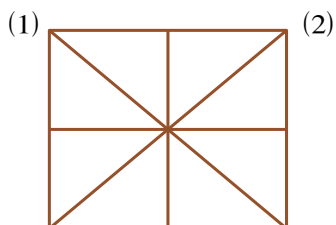
2. 旋轉板 \Rightarrow 一般無聲明「固定板或旋轉板」表示可旋轉。

平面旋轉板： $P_n^r \div (\text{可旋轉的邊數})$

例如：將五種相異的顏色塗在同一板子分割成的三個旋轉區域中，顏色不可重複，其塗法有

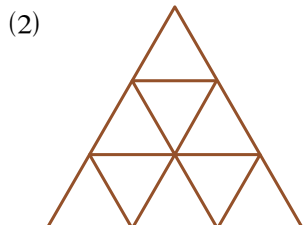
$$\text{多少種？塗法：固定板的環狀排列，} \frac{P_3^5}{3} = \frac{5!}{3 \times 2!} = 20$$

例如：以十種不同顏色塗在以下可轉動的積木上，同一顏色不准重複使用，各有幾種塗法？



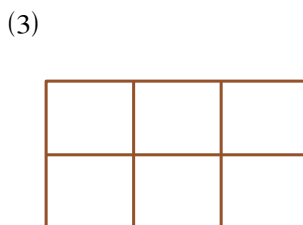
分析：旋轉數 4

答案： $\frac{P_8^{10}}{4}$



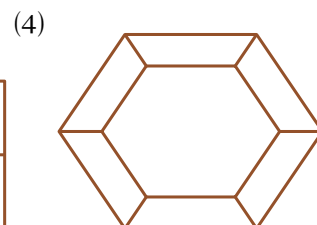
分析：旋轉數 3

答案： $\frac{P_9^{10}}{3}$



分析：旋轉數 2

答案： $\frac{P_6^{10}}{2}$



分析：旋轉數 6

答案： $\frac{P_7^{10}}{6}$

八、立體塗色問題

(一)基本立體旋轉體：

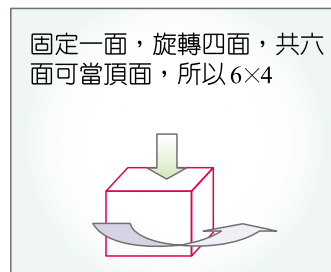
說明：針對立體旋轉體，我們將分成完全對稱型與部分對稱型來討論問題。

1. 完全對稱型： $\frac{P_{\text{區}}^{\text{色}}}{\text{旋轉數} \times \text{翻轉數}}$ 或 $P_{\text{區}}^{\text{色}} \div [\text{面數} \times (\text{固定上下, 左右旋轉的面數})]$

例如：將 8 種相異的顏色塗在正方體中，顏色不可重複，其塗法有多少種？

塗法： $\frac{P_6^8}{6 \times 4} = 840$

完全對稱型之立體圖有：正四面體、正方體、正八面體、正十二面體與正二十面體。



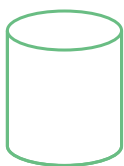
2. 部分對稱型： $P_{\text{區}}^{\text{色}} \div (\text{可旋轉的面數})$ 或 $\frac{P_{\text{區}}^{\text{色}}}{\text{旋轉數} \times \text{翻轉數}}$

說明：

- (1) $P_{\text{區}}^{\text{色}}$ 的意義就是先視所有的區域形狀均不是相同。
- (2) 然後計算旋轉時有多少相同的區域，若均不相同，旋轉數就取 1，有 2 對（側邊四面）相同，旋轉數就取 2，有 3 對（側邊六面）相同，旋轉數就取 3，有 4 面均相同，旋轉數就取 4，有 5 面均相同，旋轉數就取 5。
- (3) 若上下面區域不相同，我們就取其翻轉數為 1，若是相同，則翻轉為 2。對於角錐體一般而言其翻轉數均為 1。
- (4) 對於底面是正方形的長方體，其旋轉數為 2 翻轉數為 4。
- (5) 對於底面是長方形的長方體，其旋轉數為 2 翻轉數為 2。
- (6) 對於上下底面均是正方形，但大小不一致的四角錐台，其旋轉數為 4 翻轉數為 1。
- (7) 對於上下底面均是長方形，但大小不一致的四角錐台，其旋轉數為 2 翻轉數為 1。
- (8) 對於上下底面大小均相同之圓柱，其旋轉數 1 翻轉數 2。

(二)練習題：將 8 種相異的顏色塗在下列中，顏色不可重複，其塗法有多少種？

1.



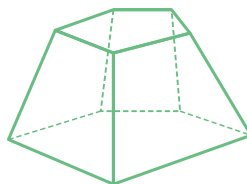
旋轉數 = 1
翻轉數 = 1
圓柱塗法：168

2.



旋轉數 = 2
翻轉數 = 4
直正四角柱塗法：2520

3.



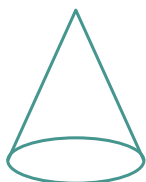
旋轉數 = 5
翻轉數 = 1
正五角錐台塗法：8064

4.



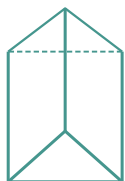
旋轉數 = 3
翻轉數 = 4
正四面體塗法：140

5.



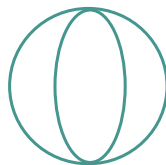
旋轉數 = 1
翻轉數 = 1
圓錐塗法：56

6.



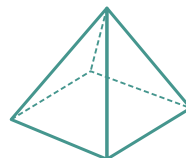
旋轉數 = 3
翻轉數 = 2
直正三角錐塗法：1120

7.



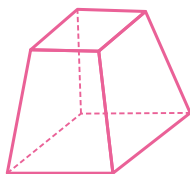
旋轉數 = 4
翻轉數 = 1
球面四等份：420

8.



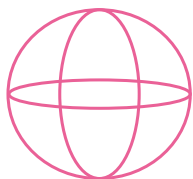
旋轉數 = 4
翻轉數 = 1
正四角錐塗法：1680

9.



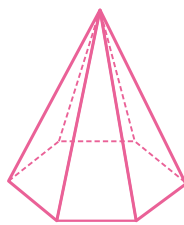
旋轉數 = 4
翻轉數 = 1
正四角錐台：5040

10.



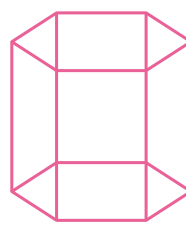
旋轉數 = 4
翻轉數 = 8
球面八等分：1260

11.



旋轉數 = 6
翻轉數 = 1
正六角錐塗法：6720

12.



旋轉數 = 6
翻轉數 = 2
直正六角柱體塗法：3360

結 論

塗色問題是排列的一種應用問題之一，藉著塗色問題，我們不只發現在平面圖形上的塗色方法，也將它擴充到立體圖形。這是一個拋磚引玉的題材，藉由這個討論，可以更引發同學，在數學上更有意義的學習，並在這當中游刃有餘。